

Marius PERIANU • Cătălin STĂNICĂ

Ioan BALICA • Cătălin MÎINESCU • Cristian LAZĂR

Matematică

pentru

Evaluarea Națională

Teme, probleme și teste de verificare



Aritmetică / Algebră

Clasele V-VIII

Partea 1. Aritmetică/Algebră

Tema 1.1.	Numere naturale. Operații cu numere naturale (clasa a V-a)	7
Tema 1.2.	Numere întregi (clasa a VI-a)	13
Tema 1.3.	Divizibilitate (clasele V-VI)	16
Tema 1.4.	Numere raționale. Frații ordinare. Frații zecimale (clasele V-VI-VII)	25
Tema 1.5.	Rapoarte. Proportii. Procente. Probabilități (clasele VI-VII)	33
Tema 1.6.	Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali (clasele VII-VIII)	42
Tema 1.7.	Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori (clasele VII-VIII)	49
Tema 1.8.	Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere (clasa a VIII-a)	54
Tema 1.9.	Funcții (clasa a VIII-a)	61
Tema 1.10.	Ecuatii, inecuații, sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, al inecuațiilor sau al sistemelor de ecuații (clasele V-VI-VII-VIII)	67

Partea 2. Geometrie

Tema 2.1.	Unghiuri. Triunghiuri (clasa a VI-a)	77
Tema 2.2.	Patratul (clasa a VII-a)	85
Tema 2.3.	Asemănare (clasa a VII-a)	92
Tema 2.4.	Relații metrice (clasa a VII-a)	100
Tema 2.5.	Cercul (clasa a VII-a)	106
Tema 2.6.	Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu (clasa a VIII-a)	112
Tema 2.7.	Corpuri geometrice. Arii și volume (clasa a VIII-a)	124

Partea 3. Variante de subiecte

3.1.	Subiecte date la Evaluarea Națională în anii 2010 – 2014	135
3.2.	Variante de subiecte propuse spre rezolvare	190

Soluții	254
----------------------	-----

Aritmetică / Algebră

Clasele V-VIII

- Tema 1.1.** Numere naturale. Operații cu numere naturale
(clasa a V-a)
- Tema 1.2.** Numere întregi
(clasa a VI-a)
- Tema 1.3.** Divizibilitate
(clasele V-VI)
- Tema 1.4.** Numere raționale. Frații ordinare. Frații zecimale
(clasele V-VI-VII)
- Tema 1.5.** Rapoarte. Proportii. Procente. Probabilități
(clasele VI-VII)
- Tema 1.6.** Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali
(clasele VII-VIII)
- Tema 1.7.** Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori
(clasele VII-VIII)
- Tema 1.8.** Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere
(clasa a VIII-a)
- Tema 1.9.** Funcții
(clasa a VIII-a)
- Tema 1.10.** Ecuții, inecuații, sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, al inecuațiilor sau al sistemelor de ecuații
(clasele V-VI-VII-VIII)

Teorema împărțirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a și b , cu $b \neq 0$, există numerele naturale q și r , unice determinate, astfel încât $a = b \cdot q + r$ și $0 \leq r < b$.

Numărul q se numește câtul împărțirii, iar numărul r se numește rest.

Exemplu: Fie două numere 23 și 5, atunci ei sunt divizibile cu numerele naturale 4 și 3 astfel încât să avem: $23 = 4 \cdot 5 + 3$ și $3 < 5$. Deci $23 : 5 = 4$ rest 3.

Tema 1.1

Numere naturale. Operații cu numere naturale

Mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ a numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

Mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ este mulțimea numerelor naturale nenule; ea se notează cu $\mathbb{N}^*$.

Cu numerele naturale putem efectua următoarele operații:

- operații de ordinul I: adunarea și scăderea;
- operații de ordinul II: înmulțirea și împărțirea;
- operații de ordinul III: ridicarea la putere.

Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor naturale

- a. Comutativitatea: pentru orice numere naturale a și b avem:
$$\begin{cases} a + b = b + a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$
- b. Asociativitatea: pentru orice numere naturale a, b, c avem:
$$\begin{cases} (a + b) + c = a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$
- c. 0 este element neutru la adunare: $a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice număr natural a .
1 este element neutru la înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice număr natural a .
- d. Înmulțirea este distributivă față de adunare și față de scădere:
$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \end{cases}$$

Operațiile cu numere naturale și relațiile de egalitate/inegalitate

1. Fiind dată o egalitate $a = b$ între două numere naturale, egalitatea se păstrează dacă:
 - a. în ambii membri se adună același număr natural: $a = b \Rightarrow a + c = b + c$;
 - b. din ambii membri se scade același număr natural: $a = b \Rightarrow a - c = b - c$;
 - c. ambii membri se înmulțesc cu același număr natural: $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$;
 - d. ambii membri se împart la același număr natural nenul: $a = b \Rightarrow a : c = b : c$.
2. Adunând sau înmulțind membru cu membru două egalități, egalitatea se păstrează:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a \cdot c = b \cdot d \end{cases}$$
3. Fiind dată o inegalitate $a \leq b$ între două numere naturale, inegalitatea se păstrează dacă:
 - a. în ambii membri se adună același număr natural: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;
 - b. din ambii membri se scade același număr natural: $a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c$;
 - c. ambii membri se înmulțesc cu același număr natural nenul: $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$;
 - d. ambii membri se împart la același număr natural nenul: $a \leq b \Rightarrow a : c \leq b : c$.

Teorema împărțirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a și b , cu $b \neq 0$, există numerele naturale q și r , unic determinate, astfel încât: $a = b \cdot q + r$ și $0 \leq r < b$.

Numărul q se numește *câtul împărțirii*, iar numărul r se numește *rest*.

Exemplu. Fiind date numerele 23 și 5, există și sunt unice numerele naturale 4 și 3 astfel încât să avem: $23 = 4 \cdot 5 + 3$ și $3 < 5$. Deci $23 : 5 = 4$ rest 3.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Fie a și n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numește puterea a n -a a numărului natural a și se notează a^n .

Scrierea a^n se citește „ a la puterea n ” sau „puterea a n -a a numărului a ”. În această scriere, a se numește *baza* puterii, iar n se numește *exponentul* puterii.

Așadar: $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, și, în general, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factori}} = a^n$, pentru $n \geq 2$.

Prin convenție, $a^1 = a$ și $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0 .

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural se numesc *pătrate perfecte*.

Exemple. 81 și 225 sunt pătrate perfecte, pentru că $81 = 9^2$ și $225 = 15^2$.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc *cuburi perfecte*.

Exemple. 27, 125 și 64 sunt cuburi perfecte, întrucât $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $64 = 4^3$.

Ultima cifră a puterii unui număr natural. Deoarece ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, avem:

1. Numerele care se termină cu cifrele 0, 1, 5, 6, ridicate la orice putere nenulă, se vor termina cu aceleași cifre.
2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2:
 - a. puterile impare ale numerelor terminate în 4 se termină în 4, iar puterile pare nenule se termină în 6;
 - b. puterile impare ale numerelor terminate în 9 se termină în 9, iar puterile pare nenule se termină în 1.
3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8, se repetă din 4 în 4.

Reguli de calcul cu puteri. Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$.

1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $m \geq n$
3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a : b$.

Observație. Sunt situații în care identitățile de mai sus se folosesc și sub forma:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^{m-n} = a^m : a^n$
3. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ - regula de înmulțire a puterilor cu același exponent
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$ - regula de împărțire a puterilor cu același exponent

Ordinea efectuării operațiilor

1. Dacă într-un exercițiu sunt operații de același ordin acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Pentru a ușura calculul, putem folosi proprietățile de comutativitate și asociativitate ale adunării și înmulțirii:

- Exemple.**
- a. $27 + 15 - 32 = 42 - 32 = 10$.
 - b. $32 : 5 : 8 \cdot 2 = 160 : 8 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$.
 - c. $137 + 455 + 63 + 45 = (137 + 63) + (455 + 45) = 200 + 500 = 700$.
 - d. $4 \cdot 231 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 231 = 100 \cdot 231 = 23\ 100$.

2. Dacă într-un exercițiu sunt operații de ordine diferite se efectuează, dacă există, mai întâi operațiile de ordinul trei, apoi operațiile de ordinul doi și, în final, operațiile de ordinul întâi, respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. a. $24: 2^3 \cdot 5 = 24: 8 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$.

b. $340: 17 + (5^4)^3 : 5^{10} - 700 : 35 = 340: 17 + 5^{12}: 5^{10} - 700 : 35 =$
 $= 340: 17 + 5^2 - 700: 35 = 340: 17 + 25 - 700: 35 = 20 + 25 - 20 = 25$.

3. Dacă într-un exercițiu există și paranteze, se efectuează mai întâi toate operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (dacă există) și în final din acolade (dacă există) și în final ce avem în afara acoladelor (dacă există), respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. a. $(38 + 275: 25) \cdot 10 - 34 \cdot 11 = (38 + 11) \cdot 10 - 374 = 49 \cdot 10 - 374 = 116$.

b. $40 \cdot [100: 4 + 5 \cdot (3^2 + 48048: 24)] + 2011 =$

Calculăm paranteza rotundă: $3^2 + 48048: 24 = 9 + 2002 = 2011$.

Calculăm paranteza dreaptă: $100: 4 + 5 \cdot 2011 = 25 + 10055 = 10080$.

Reconstituim exercițiul: $40 \cdot 10080 + 2011 = 403200 + 2011 = 405211$.

Factoriale. Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „ n factorial”. Prin convenție, $0! = 1$.

Exemple. $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5040$.

Suma primelor n numere naturale nenule. Sume Gauss

Teoremă. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$1 + 2 + \dots + n = n(n+1) : 2.$$

Într-adevăr, notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$$2S = (1 + n) + (2 + n-1) + (3 + n-2) + \dots + (n-1 + 2) + (n + 1),$$

adică $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n(n+1)$, de unde rezultă $S = n(n+1) : 2$.

La fel putem proceda pentru a calcula suma unor numere care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al sumei, unde $r \neq 0$ este un număr natural dat.

Exemplu. Calculați suma $S = 20 + 23 + 26 + \dots + 254 + 257$.

Mai întâi aflăm numărul de termeni ai sumei (cu *metoda contorului*). Termenii sumei sunt din 3 în 3 și, observând că $20 = 3 \cdot 6 + 2$, $23 = 3 \cdot 7 + 2$..., $257 = 3 \cdot 85 + 2$, rezultă că numărul termenilor sumei este egal cu numărul de numere naturale de la 6 la 85, adică $85 - 6 + 1 = 80$.

Scriem suma cu termenii așezați în ordine crescătoare, apoi, sub ea, aceeași sumă, cu termenii așezați în ordine descrescătoare, după care adunăm termen cu termen.

$$S = 20 + 23 + 26 + \dots + 254 + 257$$

$$S = 257 + 254 + 251 + \dots + 23 + 20$$

$$2S = \underbrace{277 + 277 + 277 + \dots + 277 + 277}_{80 \text{ termeni (numărul termenilor sumei } S)} = 80 \cdot 277 = 22160, \text{ deci } S = 22160 : 2 = 11080.$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Scrierea numărului trei sute de mii opt este egală cu ...
2. Cel mai mic număr natural de trei cifre cu cifra zecilor 7 este egal cu ...
3. Aproximarea lui 345672 prin lipsă, la mii este egală cu ...
4. Dintre numerele $a = 102030$, $b = 123450$ și $c = 102100$ mai mare este ...
5. Cel mai mic număr natural cu produsul cifrelor 12 este egal cu ...
6. Secvența 3, 6, 9, 12, ..., 33 conține un număr de ... numere naturale.
7. Numărul numerelor naturale impare de forma $\overline{a2b}$ este egal cu ...
8. Dacă pe axa numerelor sunt reprezentate punctele $O(0)$, $A(11)$, $B(7)$ și $C(23)$, atunci ordinea punctelor O , A , B , C pe axă este ...
9. Rezultatul calculului $19027 + 9278$ este egal cu ...
10. Rezultatul calculului $1006 - 297$ este egal cu ...
11. Rezultatul calculului $208 \cdot 17$ este egal cu ...
12. Rezultatul calculului $12 - 4 \cdot 2 + 3$ este egal cu ...
13. Dacă $ab + ac = 15$ și $b + c = 5$, atunci valoarea numărului a este egală cu ...
14. Rezultatul calculului $5 + 10 + 15 + \dots + 40$ este egal cu ...
15. Suma a trei numere naturale consecutive este 21. Produsul numerelor este egal cu ...
16. Numărul zerourilor în care se termină produsul primelor 21 de numere naturale nenule este egal cu ...
17. Rezultatul calculului $1^4 + 2^0$ este egal cu ...
18. Numărul pătratelor perfecte din secvența 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 este egal cu ...
19. Ultima cifră a numărului 2^{2013} este egală cu ...
20. Dacă $1 + 3 + 5 + \dots + 13 = x^2$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ...
21. Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu ...
22. Dintre numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$, mai mic este numărul ...
23. Dintre numerele $x = 2^{55}$, $y = 2^{33}$ și $z = 2^{44}$, cub perfect este numărul ...
24. Dacă $2^6 \cdot 4^7 \cdot 8^8 = 2^x$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ...
25. Numărul natural care împărțit la 17 dă câtul 9 și restul 15 este egal cu ...
26. Suma resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 5 este egală cu ...
27. Suma a două numere naturale este 32. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 5 și restul 2. Numărul mai mic este egal cu ...
28. Numărul numerelor naturale care împărțite la 4 dau câtul 3 este egal cu ...
29. Un număr natural n dă restul 3 la împărțirea cu 4. Restul împărțirii numărului n la 2 este egal cu ...
30. Numărul care împărțit la 7 dă câtul 9 și restul 5 este egal cu ...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

31. Se știe că $a + b + c = 7$. Calculați:
 a) $2a + 2b + 2c$; b) $10a + 10b + 10c$; c) $a \cdot 13 + b \cdot 13 + c \cdot 13 + 21$.
32. Se știe că $a = 11$ și $b + c = 8$. Calculați:
 a) $ab + ac$; b) $2a + 3b + 3c$; c) $10a + 9b + 9c$;
 d) $ab + ac + 25$; e) $ab + ac - 34$; f) $7b + 7c + 9a$;
33. Se știe că $a + b + c = 23$ și $x = 9$. Calculați:
 a) $14a + 14b + 14c + 14x$; b) $2013 - (53a + 53b + 53c + 10x)$;
 c) $349 + 6a + 6b + 6c - 12x$; d) $424 - 21x + 3a + 3b + 3c$;
34. Calculați, scoțând factor comun:
 a) $13 \cdot 5 + 13 \cdot 21 + 13 \cdot 40$; b) $437 \cdot 109 - 437 \cdot 54 + 437 \cdot 203$;
 c) $49 \cdot 135 - 49 \cdot 27 + 49 \cdot 11$; d) $2011 \cdot 5 + 2011 \cdot 7 + 2011 \cdot 49 + 2011 \cdot 39$;
35. Dacă $x = 5$ și $a + b = 13$, calculați:
 a) $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; b) $xa + xb - 50$;
 c) $10 \cdot x - (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; d) $(4a + 4b - 2x) \cdot (2a + 2b + x)$.
36. Calculați numărul x știind că $a - b = 6$ și:
 a) $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; b) $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
 c) $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; d) $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2011$.
37. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a + b + c = 57$ și $2a + b + 2c = 73$, calculați $(a + c) \cdot (5 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \cdot c)$.
38. a) Dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$, calculați $3a + 7b + 4c$.
 b) Dacă $a + b = 33$ și $a + c = 11$, calculați $5a + 3b + 2c$.
39. Știind că $x + 3y = 2y + z = 14$, calculați:
 a) $x + 5y + z$; b) $3x + 15y + 3z$; c) $5x + 11y - 2z$; d) $5x + 19y + 2z$.
40. Produsul a două numere este 672. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 992. Determinați cele două numere.
41. Produsul a două numere este 1530. Micșorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 850. Determinați cele două numere.
42. Produsul a trei numere consecutive este cu 48 mai mare decât produsul primelor două. Determinați cele trei numere naturale.
43. Efectuați:
 a) $11 + 8 \cdot \{45 + 4 \cdot [3 + 8 \cdot (12 \cdot 13 - 8 \cdot 14) - 37]\} + 1234$;
 b) $(32 \cdot 15 - 32 \cdot 5) + 11 \cdot 12 + 7 \cdot \{124 - 5 \cdot [210 - 2 \cdot (23 \cdot 17 - 24 \cdot 12)]\}$;
 c) $12 + 12 \cdot \{12 + 12 \cdot [12 + 12 \cdot (12 \cdot 12 - 122)]\} + 12 \cdot 12$;
 d) $[100 - 3 \cdot (13 \cdot 19 - 12 \cdot 18)] \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (5 + 6 \cdot 7)]\}$;
 e) $2483 - 23 \cdot [15 + 5 \cdot (127 - 119)] + 32 \cdot [178 - 5 \cdot (345 - 328)]$;
 f) $\{[19 \cdot 6 - 107 + 12 \cdot 8] \cdot 2 - 176\} + [5467 - 16 \cdot (324 - 319)]$.
44. a) Determinați numerele naturale n , pentru care $8^n + 8^{n+1} = 18 \cdot 2^{2003}$.
 b) Determinați numerele naturale n , pentru care $9^n + 9^{n+1} = 10 \cdot 3^{2012}$.

- c) Determinați numerele naturale n , pentru care $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{55}$.
- d) Determinați numerele naturale n , pentru care $7^{n+1} + 7^{n+2} = 8 \cdot 7^{11}$.
45. a) Arătați că numărul $a = 2003 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2002)$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 3 + 5 + \dots + 2011$ este pătrat perfect.
c) Arătați că numărul $a = 81 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 81 + \dots + 49 \cdot 81$ este pătrat perfect.
46. a) Câte pătrate perfecte se găsesc între numerele 100 și 1000 ?
b) Câte numere naturale pătrate perfecte se află între 2000 și 3000?
47. Arătați că numerele naturale, de forma $5 \cdot (n + 1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n .
48. Un număr natural este de 7 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 86 și mai mic decât 94?
49. Un număr natural este de 9 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 149?
50. Un număr natural este de 13 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 155?
51. a) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul 103.
c) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 32.
52. Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.
53. Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați numerele.
54. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.
55. a) Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 7 dau restul egal cu câtul.
b) Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.
56. Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărțind a la b obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe b la c obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.
57. Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.
58. Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.
59. Suma a două numere naturale este 334. Împărțind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obținem câtul 36 și restul 7. Determinați numerele.
60. Diferența a două numere naturale este 149. Împărțind numărul mai mare la jumătatea numărului mai mic obținem câtul 16 și restul 9. Determinați numerele.